Universidade Federal Fluminense – UFF
Escola de Engenharia – TCE
Curso de Engenharia de Telecomunicações – TGT
Programa de Educação Tutorial – PET

Tutorial sobre Expansão de Funções Algébricas Racionais em Frações Parciais Aplicada a Sistemas Analógicos e Digitais

(Versão: A2013M06D14)

Autores: Juliana Amparo Peixoto
Roberto Brauer Di Renna
Carina Ribeiro Barbio Corrêa

Tutor: Alexandre Santos de la Vega

Niterói – RJ
Junho / 2013

ESTUDO E ELABORAÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO SOBRE EXPANSÃO DE FUNÇÕES ALGÉBRICAS RACIONAIS EM FRAÇÕES PARCIAIS APLICADA A SISTEMAS ANALÓGICOS E DIGITAIS

Juliana A. Peixoto – jpeixoto@id.uff.br
Roberto B. Di Renna – robertobrauer@id.uff.br
Carina R. B. Corrêa – carina_barbio@id.uff.br
Alexandre S. de la Vega – delavega@telecom.uff.br
Grupo PET-Tele – http://www.telecom.uff.br/pet
Universidade Federal Fluminense – UFF
Escola de Engenharia – TCE
Departamento de Engenharia de Telecomunicações – TET
Rua Passo da Pátria, 156 / Bloco D / Sala 504
24.210-240 – Niterói – RJ

Resumo: O objetivo do presente trabalho foi o estudo e o elaboração de material didático sobre a expansão de funções algébricas racionais em frações parciais. O assunto em questão é encontrado tanto em algumas disciplinas básicas quanto em algumas disciplinas específicas do Curso de Graduação em Engenharia, as quais envolvem a análise e o projeto de sistemas analógicos e digitais. Dentre as várias motivações, pode ser citado o exercício da geração de material autoral, com a visão do aluno e baseado nas necessidades apresentadas por ele. O material elaborado é disponibilizado no *website* do Grupo PET-Tele, para *download* gratuito.

Palavras-chave: Programa de Educação Tutorial (PET), Elaboração de Material Didático, Função Algébrica Racional, Expansão em Frações Parciais, Sistemas Analógicos e Digitais.

STUDY AND DEVELOPMENT OF TEACHING MATERIALS ON PARTIAL FRACTION EXPANSION OF RATIONAL ALGEBRAIC FUNCTIONS APPLIED TO ANALOG AND DIGITAL SYSTEMS

Juliana A. Peixoto – jpeixoto@id.uff.br
Roberto B. Di Renna – robertobrauer@id.uff.br
Carina R. B. Corrêa – carina_barbio@id.uff.br
Alexandre S. de la Vega – delavega@telecom.uff.br
Grupo PET-Tele – http://www.telecom.uff.br/pet
Universidade Federal Fluminense – UFF
Escola de Engenharia – TCE
Departamento de Engenharia de Telecomunicações – TET
Rua Passo da Pátria, 156 / Bloco D / Sala 504
24.210-240 – Niterói – RJ

Abstract: The aim of this work was the study and the development of teaching materials on the expansion of rational algebraic functions into partial fractions. The issue in question is found both in some basic subjects as in some specific ones in the Undergraduate Course on Engineering, which involve the analysis and design of analog and digital systems. Among the various motivations, it may be cited the practice of generation of copyrighted material, from the students point of view and based on the needs presented by them. The final document is available at the website mantained by Grupo PET-Tele, for free download.

Key-words: Programa de Educação Tutorial (PET), Teaching Materials Development, Rational Algebraic Function, Partial Fraction Expansion, Analog and Digital Systems.

1 Introdução

Várias foram as motivações para o desenvolvimento desse trabalho. O Programa de Educação Tutorial (PET) [urla], financiado pelo Ministério da Educação (MEC), exige que os bolsistas dos grupos PET, ao serem submetidos a uma formação complementar, desenvolvam atividades que possuam, cada uma delas, itens relativos às áreas de Pesquisa, Ensino e Extensão, bem como consigam algum tipo de penetração no curso ao qual o seu grupo pertence. Nesse sentido, tanto para cumprir um dos requisitos do Programa PET, que é a produção, a manutenção e a disponibilização gratuita, de material didático autoral, como para incentivar essa prática, que não é regularmente desenvolvida ao longo do curso de graduação em questão, a mesma é inserida entre as atividades regulares do grupo PET do Curso de Engenharia de Telecomunicações da Universidade Fluminense (PET-Tele) [urlc]. Além disso, em função do tipo de trabalho a ser desenvolvido por um profissional de Engenharia, é fácil perceber que devem ser fomentados, na sua formação, o conhecimento, o domínio e a aplicação de ferramentas matemáticas. Por outro lado, muitas vezes, o material de estudo apresenta um foco extremamente matemático, o que dificulta a percepção do problema por parte do aluno. Assim, faz-se necessário, a produção de textos mais adequados a cada área de atuação. Da mesma forma, uma adequação desses texto também se faz necessária para pessoas que estejam se iniciando no assunto. Nesse contexto, a expansão de frações algébricas racionais em frações parciais encontra aplicação em diversas áreas da Matemática e da Engenharia. Portanto, ela se faz presente tanto em algumas disciplinas básicas quanto em algumas disciplinas específicas do curso de graduação abordado. Finalmente, alguns integrantes do Grupo PET-Tele, ao entrarem em contato com o assunto em disciplina básica do curso e ao perceberem que o mesmo assunto seria aplicado em outras disciplinas do curso, propuseram a realização do trabalho aqui descrito, com a intenção de facilitar a compreensão do tema.

Os objetivos fixados foram o estudo da expansão de frações algébricas racionais em frações parciais e suas possíveis aplicações, o desenvolvimento de exemplos sobre a composição de funções parciais para melhor visualização do problema e a produção de material didático sobre o assunto. O foco principal do trabalho foi resumir o assunto de forma simples, segundo a ótica dos alunos, baseado nas dificuldades visualizadas por eles.

A metodologia de trabalho adotada foi a mesma utilizada em outras atividades do grupo. Inicialmente, foi definido o assunto, baseado na argumentação de alguns integrantes. Em seguida, foi estabelecida uma bibliografia inicial e foi realizada uma pesquisa sobre o assunto. Fundamentado na leitura do material bibliográfico, o tema foi desenvolvido, seguindo os objetivos definidos. Finalmente, foi elaborado o material didático.

Este documento está dividido da seguinte forma. A Seção 2 introduz o problema, abordando os conceitos básicos envolvidos no trabalho. As funções algébricas racionais e a sua expansão em frações parciais, são definidas na Seção 3. A Seção 4 discute alguns exemplos de aplicação para a expansão em frações parciais. As fórmulas gerais para o cálculo dos coeficientes das frações parciais são abordadas na Seção 5. A Seção 6 apresenta trechos de código de programação que podem ser usados como ferramenta extra de estudo. Alguns exemplos numéricos da expansão de funções racionais em frações parciais, empregando as fórmulas gerais, são resolvidos na Seção 7. Na Seção 8, são desenvolvidos alguns exemplos literais sobre a composição de funções racionais a partir de frações parciais. Finalmente, as conclusões e os trabalhos futuros são apresentados na Seção 9.

2 Conceitos básicos

As funções denominadas de frações algébricas racionais ou funções polinomiais racionais, bem como a sua expansão em frações parciais, aparecem em diversas áreas de estudo. Portanto, é importante que sejam bem compreendidos a sua origem, a sua aplicação e o seu cálculo. Esses tópicos são brevemente descritos abaixo e cada um deles é abordado nas próximas seções.

A técnica consiste na fatoração de uma função polinomial racional de ordem qualquer em uma soma de termos que são frações polinomiais similares entre si e de ordem reduzida.

Algumas aplicações são clássicas. A primeira delas é o cálculo de Transformadas Lineares Inversas. Supondo que a função em domínio transformado é do tipo polinomial racional, a expansão simplifica o procedimento de cálculo da transformação inversa, ao lidar com funções mais simples e tabeladas. Na mesma linha de aplicação, as frações parciais podem ser empregadas no estudo de sistemas lineares e invariantes ao tempo (SLIT), analógicos, amostrados ou digitais, descritos por equações diferenciais ou equações de diferenças. Nesse caso, uma transformação da equação de definição conduz a uma função polinomial racional. Expandindo-se a função em frações parciais e tomando-se a transformada inversa de cada uma delas, obtém-se a resposta do sistema. Um terceiro exemplo de emprego de frações parciais diz respeito à implementação de um SLIT descrito por uma equação diferencial ou uma equação de diferença. Aplicando-se uma transformação à sua equação de definição, obtém-se uma função polinomial racional que, uma vez fatorada em frações parciais, fornece uma alternativa de implementação composta por um arranjo paralelo (soma) de blocos com menor complexidade e com características mais facilmente identificadas.

No tocante ao procedimento de cálculo da expansão, o problema se resume a calcular os coeficientes que aparecem em cada fração parcial, após a fatoração da função original.

Além disso, pode-se verificar ainda que, muitas vezes, na demonstração de fórmulas gerais, inicia-se por exemplos simples e, depois, por inferência, obtém-se uma forma genérica ou desenvolve-se um conceito que irá ser usado para gerar a forma genérica. Por outro lado, muitas vezes, na utilização de uma fórmula geral, a visualização do processo de cálculo com exemplos simples facilita a compreensão da ideia geral que a formulação possui. Baseado nesse raciocínio, e com o objetivo de tentar melhorar a compreensão do procedimento de obtenção das frações parciais, pode ser de grande utilidade o desenvolvimento de alguns exemplos de composição de funções polinomiais racionais a partir de frações parciais. Isso foi feito e também é abordado a seguir.

3 Frações parciais

Em diferentes áreas de estudo e em diferentes aplicações, é comum a utilização de funções que são definidas por razões de polinômios de variáveis complexas, com coeficientes reais e constantes. Tais funções, denominadas de frações racionais, ou frações algébricas racionais ou funções polinomiais racionais, podem ser descritas por

$$F(v) \;=\; \frac{N_F(v)}{D_F(v)} \;=\; \frac{d_m v^m + d_{m-1} v^{m-1} + \cdots + d_1 v + d_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0} \;,$$

onde $v \in \mathbb{C}$, $a_i, d_i \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$.

Para o caso de $m \geq n$, $F(v)$ é dita uma fração imprópria. Por outro lado, se $m < n$, $F(v)$ é denominada uma fração própria.

Se $F_I(v)$ for uma fração imprópria, pode-se separá-la na soma de um polinômio $P(v)$ e de uma fração própria $F_P(v)$, através da seguinte divisão de polinômios

$$\begin{aligned} F_I(s) \;&=\; \frac{N_{F_I}(v)}{D_{F_I}(v)} \;=\; \frac{d_m v^m + d_{m-1} v^{m-1} + \cdots + d_1 v + d_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0} \\ &=\; \big(c_{m-n} v^{m-n} + \cdots + c_1 v + c_0\big) + \frac{b_l v^l + b_{l-1} v^{l-1} + \cdots + b_1 v + b_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0} \\ &=\; P(v) + F_P(v) \;, \end{aligned}$$

onde $l < n$,

$$P(v) = \big(c_{m-n} v^{m-n} + \cdots + c_1 v + c_0\big)$$

e

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \frac{b_l v^l + b_{l-1} v^{l-1} + \cdots + b_1 v + b_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0} \;.$$

As raízes (ou zeros) dos polinômios $N_{F_P}(v)$ e $D_{F_P}(v)$ são os valores de v que anulam tais polinômios. Os zeros de $N_{F_P}(v)$ também anulam $F_P(v)$, enquanto os zeros de $D_{F_P}(v)$ fazem $F_P(v)$ tender a infinito. Assim, os zeros de $N_{F_P}(v)$ e de $D_{F_P}(v)$ são denominados, respectivamente, zeros e pólos de $F_P(v)$. Se forem contabilizados todos os pontos singulares (zeros/pólos, finitos/infinitos) de $F_P(v)$, o número de zeros será igual ao número de pólos.

Levando em consideração seus pólos e seus zeros, a função $F_P(s)$ pode ser descrita por

$$\begin{aligned} F_P(s) \;&=\; \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} \;=\; \frac{b_l v^l + b_{l-1} v^{l-1} + \cdots + b_1 v + b_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0} \\ &=\; K_{zp} \cdot \frac{(v - z_l)(v - z_{l-1}) \cdots (v - z_2)(v - z_1)}{(v - p_n)(v - p_{n-1}) \cdots (v - p_2)(v - p_1)} \;, \end{aligned} \tag{1}$$

onde z_k são os zeros de $F_P(v)$, p_k são os pólos de $F_P(v)$ e K_{zp} é a constante de ganho de $F_P(v)$, dada por

$$K_{zp} = \frac{b_l}{a_n} \;.$$

Como será abordado nas próximas seções, assumindo-se que $F_P(v)$ é uma função própria, a Equação (1) também pode ser fatorada no somatório

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \sum_i F_i(v) = \sum_i \frac{K_i}{(v - p_i)} \ ,$$

para pólos simples, ou no somatório

$$\begin{aligned} F_P(v) &= \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \sum_i F_{i_M}(v) = \sum_i \sum_{j=1}^{M} \frac{K_{ij}}{(v - p_i)^j} \\ &= \sum_i \frac{K_{i1}}{(v - p_i)} + \frac{K_{i2}}{(v - p_i)^2} + \cdots + \frac{K_{iM}}{(v - p_i)^M} \ , \end{aligned}$$

para pólos com multiplicidade M, ou ainda na combinação de ambos os somatórios

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \sum_i F_i(v) + \sum_i F_{i_M}(v) \ ,$$

se houver a presença de pólos simples e de pólos múltiplos simultaneamente.

Além disso, a Equação (1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} F_P(s) &= \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} \\ &= K_{(zp)^{-1}} \cdot \frac{(1 - z_l^{-1} v)(1 - z_{l-1}^{-1} v) \cdots (1 - z_2^{-1} v)(1 - z_1^{-1} v)}{(1 - p_n^{-1} v)(1 - p_{n-1}^{-1} v) \cdots (1 - p_2^{-1} v)(1 - p_1^{-1} v)} \ , \end{aligned} \tag{2}$$

onde

$$K_{(zp)^{-1}} = K_{zp} \cdot \frac{(-z_l)(-z_{l-1}) \cdots (-z_2)(-z_1)}{(-p_n)(-p_{n-1}) \cdots (-p_2)(-p_1)} \ ,$$

que, da mesma forma, pode ser fatorada no somatório

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \sum_i F_i(v) = \sum_i \frac{C_i}{(1 - p_i^{-1} v)} \ ,$$

para pólos simples, ou no somatório

$$\begin{aligned} F_P(v) &= \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \sum_i F_{i_M}(v) = \sum_i \sum_{j=1}^{M} \frac{C_{ij}}{(1 - p_i^{-1} v)^j} \\ &= \sum_i \frac{C_{i1}}{(1 - p_i^{-1} v)} + \frac{C_{i2}}{(1 - p_i^{-1} v)^2} + \cdots + \frac{C_{iM}}{(1 - p_i^{-1} v)^M} \ , \end{aligned}$$

para pólos com multiplicidade M, ou ainda na combinação de ambos os somatórios

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \sum_i F_i(v) + \sum_i F_{i_M}(v) \ ,$$

se houver a presença de pólos simples e de pólos múltiplos simultaneamente.

Tal fatoração, da função algébrica racional própria $F_P(v)$ em funções mais simples $F_i(v)$ e/ou $F_{i_M}(v)$, é denominada de expansão em frações parciais.

Mais detalhes sobre os tópicos abordados nessa seção podem ser encontrados nas seguintes referências: [IMD+95], [Lat98], [Mit98] e [OWY83].

4 Exemplos de aplicação para frações parciais

Alguns casos particulares do emprego de frações parciais são discutidos a seguir. Mais detalhes sobre os tópicos abordados nessa seção podem ser encontrados nas seguintes referências: [BD79], [Ste09], [ZC12], [dlV05], [dlV13], [NR09], [Lat98], [Mit98] e [OWY83].

4.1 Cálculo de Transformada Inversa

Uma forma de resolver equações diferenciais, ordinárias, lineares, com coeficientes constantes, e de ordem qualquer, é realizar uma mudança de domínio, através da aplicação de transformações lineares. Comumente, são utilizadas a Transformada de Fourier (Ordinária) e a Transformada de Laplace (ou de Fourier Complexa).

A mesma ideia é aplicada, no caso da matemática discreta, para resolver equações de diferenças, lineares, com coeficientes constantes, e de ordem qualquer. Nesse caso, normalmente são utilizadas a Transformada de Fourier em Tempo Discreto (*Discrete-Time Fourier Transform* - DTFT) e a Transformada Z.

Em ambos os casos, após realizada a transformação, a equação equivalente no domínio transformado é resolvida. Para finalizar a solução, o resultado obtido no domínio transformado deve sofrer uma transformação inversa. Dado que, no domínio transformado, tais resultados envolvem funções polinomiais racionais, uma das técnicas de cálculo da transformada inversa é quebrar a expressão em frações parciais e inverter cada uma delas independentemente.

4.2 Cálculo da resposta ao impulso de um sistema

No estudo de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT), o cálculo da sua resposta, provocada por um impulso e por um estado inicial nulo, denominada de resposta ao impulso, é facilitado pelo uso de transformações lineares e de frações parciais, conforme descrito acima.

No caso de um sistema analógico, definido por uma equação diferencial, duas análises são comumente realizadas. Na primeira, a Transformada de Fourier é aplicada à equação diferencial, dando origem à Função Resposta em Freqüência $H(j\omega) = \frac{N_H(j\omega)}{D_H(j\omega)}$, que é a transformada da resposta ao impulso, e que possui a forma apresentada na Equação (1), onde a variável v aparece substituída por $j\omega$. Em seguida, a Resposta em Freqüência é fatorada em frações parciais. Finalmente, em cada fração é aplicada a Transformada de Fourier Inversa, gerando a Resposta do Impulso $h(t)$ do sistema. Na segunda, a Transformada de Laplace é aplicada à equação diferencial, dando origem à Função de Transferência $H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$, que é a transformada da resposta ao impulso, e que possui a forma apresentada na Equação (1), onde a variável v aparece substituída por $s = \sigma + j\omega$. Em seguida, a Função de Transferência é fatorada em frações parciais. Finalmente, em cada fração é aplicada a Transformada de Laplace Inversa, gerando a Resposta do Impulso $h(t)$ do sistema.

No caso de um sistema em tempo discreto (amostrado) ou de um sistema digital (amostrado e quantizado), definido por uma equação de diferença, duas análises similares são comumente realizadas. Na primeira, a Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT) é aplicada à equação de diferença, dando origem à Função Resposta em Freqüência $H(e^{j\Omega}) = \frac{N_H(e^{j\Omega})}{D_H(e^{j\Omega})}$, que é a transformada da resposta ao impulso, e que possui a forma apresentada na Equação (2), onde a variável v aparece substituída por $e^{-j\Omega}$. Em seguida, a Resposta em Freqüência é fatorada em frações parciais. Finalmente, em cada fração é aplicada a DTFT Inversa, gerando a Resposta do Impulso $h[n]$ do sistema. Na segunda, a Transformada Z é aplicada à equação de diferença, dando origem à Função de Transferência (ou Função de Sistema) $H(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)}$, que é a transformada da resposta ao impulso, e que possui a forma apresentada na Equação (2), onde a variável v aparece substituída por $z^{-1} = e^{-(\Sigma + j\Omega)}$. Em seguida, a Função de Transferência é fatorada em frações parciais. Finalmente, em cada fração é aplicada a Transformada Z Inversa, gerando a Resposta do Impulso $h[n]$ do sistema.

4.3 Cálculo da resposta genérica de um sistema relaxado

No estudo de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT), o cálculo da sua resposta, provocada por uma determinada entrada e por um estado inicial nulo (sistema relaxado), é facilitado pelo uso de transformações lineares e de frações parciais, conforme descrito acima.

Uma primeira técnica é utilizar o mesmo procedimento descrito para a resposta ao impulso.

Um mecanismo de cálculo alternativo é baseado no conhecimento prévio da transformada em questão: $H(j\omega)$, $H(s)$, $H(e^{j\Omega})$ ou $H(z)$. Primeiramente, ela é multiplicada pela transformada da entrada. Em seguida, o resultado é fatorado em frações parciais. Finalmente, é aplicada a transformada inversa sobre cada fração parcial.

Deve ser ressaltado que o emprego das transformadas $H(j\omega)$ e $H(e^{j\Omega})$, que representam a Resposta em Frequência do sistema, está relacionado ao cálculo da sua resposta no Regime Permanente (ou Estado Estacionário). Por sua vez, o uso das transformadas $H(s)$ e $H(z)$, que representam a Função de Transferência do sistema, está ligado ao cálculo da resposta completa: Regime Transitório (ou Transiente) e Regime Permanente.

4.4 Cálculo da resposta genérica de um sistema não relaxado

No estudo de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT), o cálculo da sua resposta, provocada por uma determinada entrada e por um determinado estado inicial não nulo (sistema não relaxado), é facilitado pelo uso de transformações lineares e de frações parciais, conforme descrito acima.

Nesse caso, pode-se utilizar o mesmo procedimento descrito para a resposta ao impulso.

4.5 Implementação de sistemas utilizando estrutura paralela

No estudo de sistemas lineares e invariantes ao tempo (SLIT), analógicos e descritos por equações diferenciais ou amostrados (ou ainda digitais) e descritos por equações de diferenças, verifica-se que os mesmos podem ser implementados de diversas formas diferentes. Primeiramente, uma transformação da equação de definição (Transformada de Laplace ou Transformada Z) conduz à Função de Transferência do sistema ($H(s)$ ou $H(z)$), que é a uma função polinomial racional. De acordo com a fatoração adotada para a Função de Transferência, diversas estruturas podem ser propostas para a implementação do sistema. Por exemplo, pode-se optar por uma implementação realizada através de blocos funcionais de menor complexidade (funções polinomiais de menor ordem), onde seja mais fácil identificar parâmetros de interesse e onde seja mais fácil mapear parâmetros entre domínios (tempo e freqüência). Nesse sentido, a fatoração em frações parciais fornece, de forma geral, uma alternativa de implementação composta por um arranjo paralelo (soma) de blocos com menor complexidade e com características mais facilmente identificadas. No entanto, deve ser ressaltado que, no caso de uma Função de Transferência com pólos múltiplos, a fatoração desses pólos não é recomendada, a não ser em um caso particular, como será mostrado a seguir.

5 Fórmulas para o cálculo dos coeficientes das frações parciais

Nesta seção, considerando-se uma função polinomial racional própria $F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)}$, fórmulas para o cálculo dos coeficientes das frações parciais são apresentadas para diferentes tipos de pólos λ_i (simples/múltiplo, real/complexo) de $F_P(v)$. Mais detalhes sobre os tópicos abordados nessa seção podem ser encontrados nas seguintes referências: [IMD$^+$95], [Ste09], [ZC12], [Lat98], [Mit98] e [OWY83].

5.1 Pólos simples e reais

Pode-se provar que pólos simples e reais geram polinômios do tipo

$$\begin{aligned} F_P(v) &= \frac{N_{F_P}(v)}{(v-\lambda_1)\cdot(v-\lambda_2)\cdot \quad \cdots \quad \cdot(v-\lambda_{n-1})\cdot(v-\lambda_n)} \\ &= \frac{k_1}{(v-\lambda_1)} + \frac{k_2}{(v-\lambda_2)} + \cdots + \frac{k_{n-1}}{(v-\lambda_{n-1})} + \frac{k_n}{(v-\lambda_n)} \ , \end{aligned}$$

onde $k_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

A fim de se calcular a constante k_1, deve-se multiplicar $F_P(v)$ por $(v-\lambda_1)$, o que fornece

$$(v-\lambda_1)\cdot F_P(v) = k_1 + k_2\frac{(v-\lambda_1)}{(v-\lambda_2)} + \cdots + k_{n-1}\frac{(v-\lambda_1)}{(v-\lambda_{n-1})} + k_n\frac{(v-\lambda_1)}{(v-\lambda_n)} \ .$$

Em seguida, fazendo-se $v = \lambda_1$ ou $(v-\lambda_1) = 0$, obtém-se

$$[(v-\lambda_1)\cdot F_P(v)]|_{(v=\lambda_1)} = k_1 \ .$$

Portanto, para pólos simples e reais λ_i, o cálculo das constantes k_i é efetuado por

$$k_i = [(v-\lambda_i)\cdot F_P(v)]|_{(v=\lambda_i)} \ , \qquad i = 1, 2, \cdots, n \ . \tag{3}$$

5.2 Pólos simples e complexos

Pode-se provar que pólos simples e complexos sempre ocorrem aos pares de valores complexos conjugados $\lambda_i = (\sigma_i + j\omega_i)$ e $\lambda_i^* = (\sigma_i - j\omega_i)$, uma vez que os coeficientes do polinômio $F_P(v)$ são reais. Além disso, pode-se provar ainda que as constantes referentes aos pares de pólos complexos conjugados (λ_i e λ_i^*) são números complexos conjugados (k_i e k_i^*). Nesse caso, são gerados polinômios da forma

$$\begin{aligned} F_P(v) &= \frac{N_{F_P}(v)}{(v-\sigma_1-j\omega_1)\cdot(v-\sigma_1+j\omega_1)\cdot \quad \cdots \quad \cdot(v-\sigma_n-j\omega_n)\cdot(v-\sigma_n+j\omega_n)} \\ &= \frac{k_1}{(v-\sigma_1-j\omega_1)} + \frac{k_1^*}{(v-\sigma_1+j\omega_1)} + \cdots + \frac{k_n}{(v-\sigma_n-j\omega_n)} + \frac{k_n^*}{(v-\sigma_n+j\omega_n)} \ . \end{aligned}$$

Uma vez que os pares de constantes k_i são números complexos conjugados, necessita-se calcular apenas uma das constantes. Equivalentemente à Equação (3), o cálculo é realizado por

$$k_i = [(v-\sigma_i-j\omega_i)\cdot F_P(v)]|_{(v=\sigma_i+j\omega_i)} \ , \qquad i = 1, 2, \cdots, n \ . \tag{4}$$

5.3 Pólos múltiplos

Pode-se provar que pólos múltiplos (reais ou complexos) geram polinômios genéricos do tipo

$$\begin{aligned} F_P(v) &= \frac{N_{F_P}(v)}{(v-\lambda)^r} \\ &= \frac{k_0}{(v-\lambda)^r} + \frac{k_1}{(v-\lambda)^{r-1}} + \cdots + \frac{k_{r-2}}{(v-\lambda)^2} + \frac{k_{r-1}}{(v-\lambda)} \ , \end{aligned}$$

onde r é a multiplicidade do pólo λ.

Pode-se mostrar que as constantes k_i são calculadas por

$$k_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dv^i} \left[(v-\lambda)^r \cdot F_P(v) \right] \Big|_{(v=\lambda)} \ , \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, (r-1) \ , \tag{5}$$

onde $i! = [i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdots 2 \cdot 1]$, para $i \in \mathbb{N}^*$, e, por definição, $0! = 1$.

Aqui, alguns pontos merecem destaque. Primeiramente, deve ser notado que a Equação (5) é um caso geral para as Equações (3) e (4). Além disso, a fatoração completa se faz obrigatória apenas para o caso geral. Em casos particulares, algumas das frações podem não ser necessárias, anulando-se os respectivos coeficientes. Finalmente, exceto no caso onde apenas o coeficiente k_0 seja não nulo, a expansão em frações parciais não será útil para a realização de um sistema usando uma estrutura em paralelo, se o mesmo possuir pólos múltiplos.

5.4 Formulação alternativa

Como foi mostrado acima, o cálculo dos coeficientes para pólos múltiplos é um caso geral, podendo ser usado também para o cálculo de pólos simples. Portanto, considerando-se pólos múltiplos (reais ou complexos) e a fatoração das funções racionais apresentada na Equação (2), obtêm-se polinômios do tipo

$$\begin{aligned} F_P(v) &= \frac{N_{F_P}(v)}{(1-\lambda^{-1}v)^r} \\ &= \frac{k_0}{(1-\lambda^{-1}v)^r} + \frac{k_1}{(1-\lambda^{-1}v)^{r-1}} + \cdots + \frac{k_{r-2}}{(1-\lambda^{-1}v)^2} + \frac{k_{r-1}}{(1-\lambda^{-1}v)} \ , \end{aligned}$$

onde r é a multiplicidade do pólo λ.

Pode-se mostrar que as constantes k_i são calculadas por

$$k_i = (-\lambda)^i \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dv^i} \left[(1-\lambda^{-1}v)^r \cdot F_P(v) \right] \Big|_{(v=\lambda)} \ , \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, (r-1) \ , \tag{6}$$

onde $i! = [i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdots 2 \cdot 1]$, para $i \in \mathbb{N}^*$, e, por definição, $0! = 1$.

6 Auxílio computacional

Como apresentado acima, a expansão de uma função algébrica racional genérica em frações parciais envolve os seguintes passos:

- Se necessário, obter a fração própria $F_P(v)$, através da divisão polinomial $F_I(v) = \frac{N_{F_I}(v)}{D_{F_I}(v)} = P(v) + F_P(v)$.
- Fatorar o seu denominador $D_{F_P}(v)$, para calcular os valores dos seus pólos.
- Aplicar as fórmulas de cálculo, utilizando os valores calculados para os pólos.

No período de aprendizado desse processo, quando são manipuladas equações simples, é interessante que as respostas de exercícios estejam disponíveis para comparação. De forma a possibilitar a formulação de inúmeros exercícios e a disponibilização de suas respostas, o auxílio computacional pode ser bastante útil. Por outro lado, ao lidar-se com equações mais complexas, o auxílio computacional torna-se imprescindível.

A fim de fornecer uma ferramenta extra de estudo, foram desenvolvidos trechos de código de programação para o ambiente de simulação matemática OCTAVE [urlb], os quais são apresentados a seguir.

6.1 Cálculo da divisão polinomial

```
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Titulo: Demo da expansao
%         de fracao algebrica racional impropria
%         em polinomio numerador
%         mais fracao algebrica racional propria.
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%


% impressao do titulo
str_linha  = ['==================================================', ...
              '==================================================', ...
              '====================\n'];

str_titulo = [' Demo da expansao', ...
              ' de fracao algebrica racional impropria', ...
              ' em polinomio numerador', ...
              ' mais fracao algebrica racional propria\n'];

fprintf('\n\n')
fprintf(str_linha);
fprintf(str_titulo);
fprintf(str_linha);
fprintf('\n\n')
```

```
% entrada de dados
str_num = ['Insira os coeficientes do numerador', ...
           ' da fracao impropria', ...
           ' na forma de um vetor [d_M ... d_2 d_1 d_0]: '];

str_den = ['Insira os coeficientes do denominador', ...
           ' da fracao impropria', ...
           ' na forma de um vetor [a_N ... a_2 a_1 a_0]: '];

num_imp = input(str_num);
fprintf('\n')
den_imp = input(str_den);
fprintf('\n')


% calculo do polinomio numerador e
%         do numerador da funcao propria
[pol_num,num_prop] = deconv(num_imp,den_imp);


% saida de dados
str_pol = ['\nCoeficientes do polinomio numerador', ...
           ' [c_P ... c_1 c_0]: ['];

str_num = ['\nCoeficientes do numerador da funcao propria', ...
           ' [b_L ... b_1 b_0]: ['];

str_den = ['\nCoeficientes do denominador da funcao propria', ...
           ' [a_N ... a_1 a_0]: ['];

fprintf(str_pol)
if (length(pol_num))
    fprintf('%8.3f ', pol_num)
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf(str_num)
if (length(num_prop))
    fprintf('%8.3f ', num_prop)
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf(str_den)
if (length(den_imp))
    fprintf('%8.3f ', den_imp)
```

```
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf('\n\n')
fprintf(str_linha);
fprintf('\n\n')


%
% EOF
%
```

6.2 Cálculo dos zeros, dos pólos e da constante de ganho

```
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Titulo: Demo do calculo
%         dos zeros, dos polos e da constante de ganho
%         de uma fracao algebrica racional.
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%


% impressao do titulo
str_linha  = ['==================================================', ...
              '=============================================\n'];

str_titulo = [' Demo do calculo', ...
              ' dos zeros, dos polos e da constante de ganho', ...
              ' de uma fracao algebrica racional\n'];

fprintf('\n\n')
fprintf(str_linha);
fprintf(str_titulo);
fprintf(str_linha);
fprintf('\n\n')


% entrada de dados
str_num = ['Insira os coeficientes do numerador', ...
           ' na forma de um vetor [b_L ... b_2 b_1 b_0]: '];

str_den = ['Insira os coeficientes do denominador', ...
           ' na forma de um vetor [a_N ... a_2 a_1 a_0]: '];

num = input(str_num);
```

```
fprintf('\n')
den = input(str_den);
fprintf('\n')


% calculo dos zeros, dos polos e da constante de ganho
[z, p, k] = tf2zp(num,den);


% saida de dados
str_zeros = ['\nRaizes do polinomio numerador', ...
             ' [z_1 z_2 ... z_L]: ['];

str_polos = ['\nRaizes do polinomio denominador', ...
             ' [p_1 p_2 ... p_N]: ['];

str_ganho = ['\nConstante de ganho: ['];

fprintf(str_zeros)
if (length(z))
    fprintf('(%8.3f) + j(%8.3f) ', [real(z'); imag(z')])
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf(str_polos)
if (length(p))
    fprintf('(%8.3f) + j(%8.3f) ', [real(p'); imag(p')])
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf(str_ganho)
if (length(k))
    fprintf('%8.3f ', k)
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf('\n\n')
fprintf(str_linha);
fprintf('\n\n')


%
% EOF
%
```

6.3 Cálculo das frações parciais

```
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Titulo: Demo da expansao de fracao algebrica racional
%         em polinomio numerador mais fracoes parciais.
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%


% impressao do titulo
str_linha  = ['==================================================', ...
              '==========================================\n'];

str_titulo = [' Demo da expansao de fracao algebrica racional', ...
              ' em polinomio numerador mais fracoes parciais\n'];

fprintf('\n\n')
fprintf(str_linha);
fprintf(str_titulo);
fprintf(str_linha);
fprintf('\n\n')


% entrada de dados
str_num = ['Insira os coeficientes do numerador', ...
           ' na forma de um vetor [d_M ... d_2 d_1 d_0]: '];

str_den = ['Insira os coeficientes do denominador', ...
           ' na forma de um vetor [a_N ... a_2 a_1 a_0]: '];

num_imp = input(str_num);
fprintf('\n')
den_imp = input(str_den);
fprintf('\n')


% calculo do polinomio numerador e
%         do numerador da funcao propria
[residuos, polos, pol_num] = residue(num_imp,den_imp);

% saida de dados
str_pol   = ['\nCoeficientes do polinomio numerador', ...
             ' [c_P ... c_1 c_0]: ['];

str_res   = ['\nResiduos', ...
             ' [k_1 k_2 ... k_N]: ['];
```

```
str_polos = ['\nPolos', ...
            ' [p_1 p_2 ... p_N]: ['];

fprintf(str_pol)
if (length(pol_num))
    fprintf('%8.3f ', pol_num)
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf(str_res)
if (length(residuos))
    fprintf('(%8.3f) + j(%8.3f) ', [real(residuos'); imag(residuos')])
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf(str_polos)
if (length(polos))
    fprintf('(%8.3f) + j(%8.3f) ', [real(polos'); imag(polos')])
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf('\n\n')
fprintf(str_linha);
fprintf('\n\n')


%
% EOF
%
```

6.4 Cálculo da composição de função algébrica racional

```
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Titulo: Demo da composicao de fracao algebrica racional
%         a partir de fracoes parciais.
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%


% impressao do titulo
str_linha  = ['==================================================', ...
              '============================\n'];
```

```
str_titulo = [' Demo da composicao de fracao algebrica racional', ...
              ' a partir de fracoes parciais\n'];

fprintf('\n\n')
fprintf(str_linha);
fprintf(str_titulo);
fprintf(str_linha);
fprintf('\n\n')


% entrada de dados
str_res   = ['Insira os residuos', ...
             ' na forma de um vetor [k_1 k_2 ... k_N]: '];
str_polos = ['Insira os polos', ...
             ' na forma de um vetor [p_1 p_2 ... p_N]: '];

residuos = input(str_res);
fprintf('\n')
polos    = input(str_polos);
fprintf('\n')
pol_num  = [];


% calculo dos coeficientes do numerador e do denominador da funcao
[num,den] = residue(residuos, polos, pol_num);


% saida de dados
str_num = ['\nCoeficientes do numerador da funcao', ...
           ' [b_L ... b_1 b_0]: ['];

str_den = ['\nCoeficientes do denominador da funcao', ...
           ' [a_N ... a_1 a_0]: ['];

fprintf(str_num)
if (length(num))
    fprintf('%8.3f ', num)
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')

fprintf(str_den)
if (length(den))
    fprintf('%8.3f ', den)
    fprintf('\b')
end
fprintf(']\n')
```

```
fprintf('\n\n')
fprintf(str_linha);
fprintf('\n\n')


%
% EOF
%
```

7 Exemplos de emprego das fórmulas para o cálculo dos coeficientes das frações parciais

Com o objetivo de tornar claro o processo de cálculo dos coeficientes das frações parciais através do uso das fórmulas de cálculo anteriormente apresentadas, alguns exemplos numéricos são resolvidos a seguir.

Exemplo 1

Dada a função

$$F_I(s) = \frac{6s^3 + 55s^2 + 152s + 127}{s^2 + 8s + 15} \ ,$$

a mesma pode ser fatorada em

$$F_I(s) = P(s) + F_P(s) = (6s + 7) + \frac{6s + 22}{s^2 + 8s + 15} \ .$$

Exemplo 2

Dada a função

$$F_P(s) = \frac{6s + 22}{s^2 + 8s + 15} \ ,$$

a mesma pode ser fatorada em

$$F_P(s) = \frac{6s + 22}{(s + 3)(s + 5)} = \frac{K_1}{(s + 3)} + \frac{K_2}{(s + 5)} \ ,$$

onde os coeficientes são dados por

$$K_1 = \left[(s + 3) \cdot F_P(s) \right] \big|_{s=-3} = \left. \frac{6s + 22}{(s + 5)} \right|_{s=-3} = \frac{-18 + 22}{(-3 + 5)} = \frac{4}{2} = 2$$

e

$$K_2 = \left[(s + 5) \cdot F_P(s) \right] \big|_{s=-5} = \left. \frac{6s + 22}{(s + 3)} \right|_{s=-5} = \frac{-30 + 22}{(-5 + 3)} = \frac{-8}{-2} = 4 \ .$$

Exemplo 3

Dada a função

$$F_P(s) = 4 \cdot \frac{s + 4}{s^2 + 8s + 41} \ ,$$

a mesma pode ser fatorada em

$$F_P(s) = 4 \cdot \frac{s + 4}{(s + 4 + j5)(s + 4 - j5)} = \frac{K_1}{(s + 4 + j5)} + \frac{K_2}{(s + 4 - j5)} \ ,$$

onde os coeficientes são dados por

$$K_1 = \left[(s + 4 + j5) \cdot F_P(s) \right] \big|_{s=-4-j5} = 4 \cdot \left. \frac{s + 4}{(s + 4 - j5)} \right|_{s=-4-j5} = 4 \cdot \frac{-4 - j5 + 4}{(-4 - j5 + 4 - j5)} = 2$$

e

$$K_2 = K_1^* = 2 \ .$$

Exemplo 4

Dada a função

$$F_P(s) = \frac{4s+46}{s^2+8s+41} \ ,$$

a mesma pode ser fatorada em

$$F_P(s) = \frac{4s+46}{(s+4+j5)(s+4-j5)} = \frac{K_1}{(s+4+j5)} + \frac{K_2}{(s+4-j5)} \ ,$$

onde os coeficientes são dados por

$$K_1 = \left[(s+4+j5) \cdot F_P(s)\right]\Big|_{s=-4-j5} = \left.\frac{4s+46}{(s+4-j5)}\right|_{s=-4-j5} = \frac{-16-j20+46}{(-4-j5+4-j5)} = 2+j3$$

e

$$K_2 = K_1^* = 2 - j3 \ .$$

Exemplo 5

Dada a função

$$F_P(s) = \frac{10s^2+166s+524}{s^3+15s^2+121s+255} \ ,$$

a mesma pode ser fatorada em

$$F_P(s) = \frac{10s^2+166s+524}{(s+3)(s+6+j7)(s+6-j7)} = \frac{K_1}{(s+3)} + \frac{K_2}{(s+6+j7)} + \frac{K_3}{(s+6-j7)} \ ,$$

onde os coeficientes são dados por

$$K_1 = \left[(s+3) \cdot F_P(s)\right]\Big|_{s=-3} = \left.\frac{10s^2+166s+524}{(s+6+j7)(s+6-j7)}\right|_{s=-3} = \frac{90-498+524}{(-3+6+j7)(-3+6-j7)} = 2 \ ,$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \left[(s+6+j7) \cdot F_P(s)\right]\Big|_{s=-6-j7} = \left.\frac{10s^2+166s+524}{(s+3)(s+6-j7)}\right|_{s=-6-j7} \\ &= \frac{-130+j840-996-j1162+524}{(-6-j7+3)(-6-j7+6-j7)} = \frac{-602-j322}{-98+j42} = 4+j5 \end{aligned}$$

e

$$K_3 = K_2^* = 4 - j5 \ .$$

Exemplo 6

Dada a função

$$F_P(s) = \frac{4s+14}{s^2+6s+9} \ ,$$

a mesma pode ser fatorada em

$$F_P(s) = \frac{4s+14}{(s+3)^2} = \frac{K_0}{(s+3)^2} + \frac{K_1}{(s+3)} \ ,$$

onde os coeficientes são dados por

$$K_0 = \left[(s+3)^2 \cdot F_P(s)\right]\Big|_{s=-3} = \left[4s+14\right]\Big|_{s=-3} = -12+14 = 2$$

e

$$K_1 = \left.\frac{d}{ds}\left[(s+3)^2 \cdot F_P(s)\right]\right|_{s=-3} = \left.\frac{d}{ds}\left[4s+14\right]\right|_{s=-3} = (4)\big|_{s=-3} = 4 \ .$$

Exemplo 7

Dada a função

$$F_P(s) = \frac{5s^2 + 34s + 59}{s^3 + 9s^2 + 27s + 27} \ ,$$

a mesma pode ser fatorada em

$$F_P(s) = \frac{5s^2 + 34s + 59}{(s+3)^3} = \frac{K_0}{(s+3)^3} + \frac{K_1}{(s+3)^2} + \frac{K_2}{(s+3)} \ ,$$

onde os coeficientes são dados por

$$K_0 = \left[(s+3)^3 \cdot F_P(s)\right]\Big|_{s=-3} = \left[5s^2 + 34s + 59\right]\Big|_{s=-3} = 45 - 102 + 59 = 2 \ ,$$

$$K_1 = \frac{d}{ds}\left[(s+3)^3 \cdot F_P(s)\right]\Bigg|_{s=-3} = \frac{d}{ds}\left[5s^2 + 34s + 59\right]\Bigg|_{s=-3} = (10s + 34)|_{s=-3} = -30 + 34 = 4$$

e

$$K_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+3)^3 \cdot F_P(s)\right]\Bigg|_{s=-3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[5s^2 + 34s + 59\right]\Bigg|_{s=-3} = \frac{1}{2}(10)\Bigg|_{s=-3} = 5 \ .$$

Exemplo 8

Dada a função

$$F_P(s) = \frac{2s^2 + 24s + 62}{s^3 + 13s^2 + 55s + 75} \ ,$$

a mesma pode ser fatorada em

$$F_P(s) = \frac{2s^2 + 24s + 62}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{K_1}{(s+3)} + \frac{K_{20}}{(s+5)^2} + \frac{K_{21}}{(s+5)} \ ,$$

onde os coeficientes são dados por

$$K_1 = \left[(s+3) \cdot F_P(s)\right]|_{s=-3} = \left[\frac{2s^2 + 24s + 62}{(s+5)^2}\right]\Bigg|_{s=-3} = \frac{18 - 72 + 62}{4} = 2 \ ,$$

$$K_{20} = \left[(s+5)^2 \cdot F_P(s)\right]\Big|_{s=-5} = \left[\frac{2s^2 + 24s + 62}{(s+3)}\right]\Bigg|_{s=-5} = \frac{50 - 120 + 62}{(-2)} = 4$$

e

$$\begin{aligned}
K_{21} &= \frac{d}{ds}\left[(s+5)^2 \cdot F_P(s)\right]\Bigg|_{s=-5} \\
&= \frac{d}{ds}\left[\frac{2s^2 + 24s + 62}{(s+3)}\right]\Bigg|_{s=-5} \\
&= \left[\frac{(4s+24)(s+3) - (2s^2 + 24s + 62)}{(s+3)^2}\right]\Bigg|_{s=-5} \\
&= \left[\frac{(-20+24)(-5+3) - (50 - 120 + 62)}{(-5+3)^2}\right] \\
&= \frac{(4)(-2) - (-8)}{(-2)^2} \ = \ 0 \ .
\end{aligned}$$

Exemplo 9

Dada a função

$$F_P(s) = \frac{8s^2 + 72s + 152}{s^3 + 13s^2 + 55s + 75} \ ,$$

a mesma pode ser fatorada em

$$F_P(s) = \frac{8s^2 + 72s + 152}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{K_1}{(s+3)} + \frac{K_{20}}{(s+5)^2} + \frac{K_{21}}{(s+5)} \ ,$$

onde os coeficientes são dados por

$$K_1 = \left[(s+3) \cdot F_P(s)\right]\Big|_{s=-3} = \left[\frac{8s^2 + 72s + 152}{(s+5)^2}\right]\Bigg|_{s=-3} = \frac{27 - 96 + 77}{4} = 2 \ ,$$

$$K_{20} = \left[(s+5)^2 \cdot F_P(s)\right]\Big|_{s=-5} = \left[\frac{8s^2 + 72s + 152}{(s+3)}\right]\Bigg|_{s=-5} = \frac{200 - 360 + 152}{(-2)} = 4$$

e

$$\begin{aligned}
K_{21} &= \frac{d}{ds}\left[(s+5)^2 \cdot F_P(s)\right]\Bigg|_{s=-5} \\
&= \frac{d}{ds}\left[\frac{8s^2 + 72s + 152}{(s+3)}\right]\Bigg|_{s=-5} \\
&= \left[\frac{(16s + 72)(s+3) - (8s^2 + 72s + 152)}{(s+3)^2}\right]\Bigg|_{s=-5} \\
&= \left[\frac{(-80 + 72)(-5+3) - (200 - 360 + 152)}{(-5+3)^2}\right] \\
&= \frac{(-8)(-2) - (-8)}{(-2)^2} \ = \ 6 \ .
\end{aligned}$$

8 Exemplos de composição de frações parciais

Com o objetivo de tentar melhorar a compreensão do procedimento de obtenção das frações parciais a partir das funções racionais, foram desenvolvidos, no sentido inverso, alguns exemplos de composição de frações parciais, a fim de gerar funções racionais.

A ideia básica foi a seguinte. Na demonstração de fórmulas gerais, muitas vezes, inicia-se por exemplos simples e, depois, por inferência, obtém-se uma forma genérica ou desenvolve-se um conceito básico que irá ser usado para gerar a forma genérica. Por outro lado, na utilização de uma fórmula geral, muitas vezes, a visualização do processo de cálculo com exemplos simples facilita a compreensão da ideia geral que a formulação possui. Baseado nesse ideia, foram matematicamente calculados vários exemplos de composição de frações parciais, produzindo funções racionais próprias $F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)}$ com diferentes relações entre os graus dos polinômios $N_{F_P}(v)$ e $D_{F_P}(v)$.

As composições foram criadas através da combinação de frações parciais de diferentes tipos, levando em consideração: i) o tipo de coeficiente da fração parcial (real/complexo) e ii) o tipo de pólo (real/complexo e simples/múltiplo).

A Tabela 8 apresenta um resumo dos exemplos construídos e os seus resultados. As composições foram de três tipos básicos: dois pólos simples, apenas um pólo múltiplo e um pólo múltiplo combinado com um pólo simples. No caso de um pólo múltiplo, foram construídos dois tipos de exemplos: apenas a fração de mais alto grau e todas as frações (do grau mais alto até o grau unitário). Por sua vez, os resultados são indicados pelo número do exemplo e pelo tipo de função racional gerado, que foram: i) "Geral", para $grau(N_{F_P}) = grau(D_{F_P}) - 1$, ii) "Não geral", para $grau(N_{F_P}) < grau(D_{F_P}) - 1$ e iii) "X", para não realizável. Os exemplos não finalizados e os não construídos até a data da elaboração deste artigo foram indicados, respectivamente, como "Terminar" e "Fazer".

Pólo	Composição		Coeficiente da fração parcial	
			Real	Complexo
Real	Simples + Simples		Ex.1 - Geral	Ex.2 - X
	Múltiplo apenas	Fração única	Ex.5 - Não geral	Ex.5 - X
		Todas as frações	Ex.6 - Geral	Ex.6 - X
	Múltiplo + Simples	Fração única	Ex.7 - Não geral	Ex.7 - X
		Todas as frações	Ex.8 - Geral	Ex.8 - X
Complexo	Simples + Simples		Ex.3 - Não geral	Ex.4 - Geral
	Múltiplos apenas	Fração única	Ex.9 - Não geral	Ex.10 - Não geral
		Todas as frações	Ex.11 - Terminar	Ex.12 - Terminar
	Múltiplos + Simples	Fração única	Fazer	Fazer
		Todas as frações	Fazer	Fazer

Tabela 1: Tabela resumo dos exemplos de composição de frações parciais calculados.

8.1 Pólos simples e reais

Exemplo 1

Supondo-se frações parciais com coeficientes reais e com pólos simples e reais, pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
\frac{K_1}{(s+p_1)} + \frac{K_2}{(s+p_2)} &= \frac{K_1(s+p_2) + K_2(s+p_1)}{(s+p_1)\,(s+p_2)} \\
&= \frac{(K_1+K_2)s + (p_2K_1 + p_1K_2)}{s^2 + (p_1+p_2)s + (p_1p_2)} \\
&= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s)\ . \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Investigando-se o caso de frações parciais com coeficientes complexos e com pólos simples e reais, pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
\frac{(K_{r_1} + jK_{i_1})}{(s+p_1)} + \frac{(K_{r_2} + jK_{i_2})}{(s+p_2)} &= \frac{(K_{r_1} + jK_{i_1})(s+p_2) + (K_{r_2} + jK_{i_2})(s+p_1)}{(s+p_1)\,(s+p_2)} \\
&= \frac{(K_{r_1}+K_{r_2})s + (p_2K_{r_1} + p_1K_{r_2})}{s^2 + (p_1+p_2)s + (p_1p_2)} + \\
&\quad\ \frac{j(K_{i_1}+K_{i_2})s + j(p_2K_{i_1} + p_1K_{i_2})}{s^2 + (p_1+p_2)s + (p_1p_2)} \\
&= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s)\ . \qquad (8)
\end{aligned}
$$

De (8), supondo-se que os coeficientes a_k e b_k são reais, conclui-se que

$$K_{i_2} = -K_{i_1} \qquad (9)$$

e, conseqüentemente, como $p_2 \neq p_1$, que

$$K_{i_2} = K_{i_1} = 0\ . \qquad (10)$$

Dessa forma, a Equação (8) assume a forma da Equação (7).

8.2 Pólos simples e complexos

Exemplo 3

Supondo-se frações parciais com coeficientes reais e com pólos simples e complexos, pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
&\frac{K_1}{(s+\sigma_1+j\omega_1)} + \frac{K_2}{(s+\sigma_2+j\omega_2)} = \\
&\frac{K_1(s+\sigma_2+j\omega_2) + K_2(s+\sigma_1+j\omega_1)}{(s+\sigma_1+j\omega_1)(s+\sigma_2+j\omega_2)} = \\
&\frac{(K_1+K_2)s + (\sigma_2 K_1 + \sigma_1 K_2) + j(\omega_2 K_1 + \omega_1 K_2)}{s^2 + (\sigma_1+\sigma_2)s + (\sigma_1\sigma_2 - \omega_1\omega_2) + j(\omega_1+\omega_2)s + j(\sigma_1\omega_2 + \sigma_2\omega_1)} = \\
&\frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s) \ .
\end{aligned} \tag{11}
$$

De (11), supondo-se que os coeficientes a_k e b_k são reais, conclui-se que

$$\omega_2 = -\omega_1 \tag{12}$$

e, conseqüentemente, no caso de $\omega_2 = -\omega_1 \neq 0$, que

$$\sigma_2 = \sigma_1 \tag{13}$$

e

$$K_2 = K_1 \ . \tag{14}$$

Portanto, a Equação (11) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\frac{K}{(s+\sigma+j\omega)} + \frac{K}{(s+\sigma-j\omega)} &= \frac{K(s+\sigma-j\omega) + K(s+\sigma+j\omega)}{(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega)} \\
&= \frac{(2K)s + (2\sigma K)}{s^2 + (2\sigma)s + (\sigma^2+\omega^2)} \\
&= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s) \ .
\end{aligned} \tag{15}
$$

Em (15), observa-se que os coeficientes b_k são associados à constante K por um sistema de 2 equações a 1 variável. Nesse caso, b_0 depende de b_1 e a_1. Logo, essa fórmula não representa um caso geral.

Exemplo 4

Alternativamente à Equação (11), pode-se investigar o uso de frações parciais com coeficientes complexos e com pólos simples e complexos. Dessa forma, a Equação (11) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
&\frac{(K_{r_1} + jK_{i_1})}{(s + \sigma_1 + j\omega_1)} + \frac{(K_{r_2} + jK_{i_2})}{(s + \sigma_2 + j\omega_2)} = \\
&\frac{(K_{r_1} + jK_{i_1})(s + \sigma_2 + j\omega_2) + (K_{r_2} + jK_{i_2})(s + \sigma_1 + j\omega_1)}{(s + \sigma_1 + j\omega_1)(s + \sigma_2 + j\omega_2)} = \\
&\frac{(K_{r_1} + K_{r_2})s + (\sigma_2 K_{r_1} + \sigma_1 K_{r_2}) - (\omega_2 K_{i_1} + \omega_1 K_{i_2})}{s^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)s + (\sigma_1\sigma_2 - \omega_1\omega_2) + j(\omega_1 + \omega_2)s + j(\sigma_1\omega_2 + \sigma_2\omega_1)} + \\
&\frac{j(K_{i_1} + K_{i_2})s + j(\sigma_2 K_{i_1} + \sigma_1 K_{i_2}) + j(\omega_2 K_{r_1} + \omega_1 K_{r_2})}{s^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)s + (\sigma_1\sigma_2 - \omega_1\omega_2) + j(\omega_1 + \omega_2)s + j(\sigma_1\omega_2 + \sigma_2\omega_1)} = \\
&\frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \; = \; \frac{N(s)}{D(s)} \; = \; P(s) \; . \qquad (16)
\end{aligned}
$$

De (16), supondo-se que os coeficientes a_k e b_k são reais, conclui-se que

$$\omega_2 = -\omega_1 \; , \qquad (17)$$

$$K_{i_2} = -K_{i_1} \qquad (18)$$

e, conseqüentemente, no caso de $\omega_2 = -\omega_1 \neq 0$ e $K_{i_2} = -K_{i_1} \neq 0$, que

$$\sigma_2 = \sigma_1 \qquad (19)$$

e

$$K_{r_2} = K_{r_1} \; . \qquad (20)$$

Portanto, a Equação (16) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\frac{(K_r + jK_i)}{(s + \sigma + j\omega)} + \frac{(K_r - jK_i)}{(s + \sigma - j\omega)} \; &= \; \frac{(K_r + jK_i)(s + \sigma - j\omega) + (K_r - jK_i)(s + \sigma + j\omega)}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)} \\
&= \; \frac{(2K_r)s + (2\sigma K_r + 2\omega K_i)}{s^2 + (2\sigma)s + (\sigma^2 + \omega^2)} \\
&= \; \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \; = \; \frac{N(s)}{D(s)} \; = \; P(s) \; . \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Agora, em (21), observa-se que os coeficientes b_k são associados às constantes K_r e K_i por um sistema de 2 equações a 2 variáveis. Logo, essa fórmula representa um caso geral.

8.3 Apenas pólos múltiplos e reais

Exemplo 5

Supondo-se frações parciais com coeficientes reais e com pólos múltiplos e reais, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\frac{K_2}{(s+p)^2} &= \frac{(K_2)}{s^2 + (2p)s + (p^2)} \\
&= \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s) \ . \qquad (22)
\end{aligned}$$

A partir de (22), supondo-se que os coeficientes a_k e b_k são reais, pode-se mostrar que K_2 não pode ser complexo.

Exemplo 6

Alternativamente à Equação (22), pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\frac{K_1}{(s+p)} + \frac{K_2}{(s+p)^2} &= \frac{K_1(s+p) + K_2}{(s+p)^2} \\
&= \frac{(K_1)s + (pK_1 + K_2)}{s^2 + (2p)s + (p^2)} \\
&= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s) \ . \qquad (23)
\end{aligned}$$

A partir de (23), supondo-se que os coeficientes a_k e b_k são reais, pode-se mostrar que K_1 e K_2 não podem ser complexos.

8.4 Pólos múltiplos e reais com pólos simples e reais

Exemplo 7

Supondo-se frações parciais com coeficientes reais e com uma mistura de pólos múltiplos e reais com pólos simples e reais, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\frac{K_2}{(s+p_1)^2} + \frac{K_3}{(s+p_3)} &= \frac{K_2(s+p_3) + K_3(s+p_1)^2}{(s+p_1)^2(s+p_3)} \\
&= \frac{K_2(s+p_3) + K_3\left[s^2 + (2p_1)s + (p_1^2)\right]}{\left[s^2 + (2p_1)s + (p_1^2)\right](s+p_3)} \\
&= \frac{(K_3)s^2 + \left[K_2 + (2p_1)K_3\right]s + \left[(p_3)K_2 + (p_1^2)K_3\right]}{s^3 + (2p_1 + p_3)s^2 + (p_1^2 + 2p_1p_3)s + (p_1^2 p_3)} \\
&= \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s) \ . \qquad (24)
\end{aligned}$$

Em (24), observa-se que os coeficientes b_k são associados às constantes K_2 e K_3 por um sistema de 3 equações a 2 variáveis. Nesse caso, b_0 depende de b_1, b_2 e a_k. Logo, essa fórmula não representa um caso geral.

A partir de (24), supondo-se que os coeficientes a_k e b_k são reais, pode-se mostrar que K_2 e K_3 não podem ser complexos.

Exemplo 8

Alternativamente à Equação (24), pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
& \frac{K_1}{(s+p_1)} + \frac{K_2}{(s+p_1)^2} + \frac{K_3}{(s+p_3)} = \\
& \frac{K_1(s+p_1)(s+p_3) + K_2(s+p_3) + K_3(s+p_1)^2}{(s+p_1)^2(s+p_3)} = \\
& \frac{K_1\left[s^2 + (p_1+p_3)s + (p_1p_3)\right] + K_2(s+p_3) + K_3\left[s^2 + (2p_1)s + (p_1^2)\right]}{\left[s^2 + (2p_1)s + (p_1^2)\right](s+p_3)} = \\
& \frac{(K_1+K_3)s^2 + \left[(p_1+p_3)K_1 + K_2 + (2p_1)K_3\right]s + \left[(p_1p_3)K_1 + (p_3)K_2 + (p_1^2)K_3\right]}{s^3 + (2p_1+p_3)s^2 + (p_1^2 + 2p_1p_3)s + (p_1^2p_3)} = \\
& \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \ = \ \frac{N(s)}{D(s)} \ = \ P(s) \ . \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Agora, em (25), observa-se que os coeficientes b_k são associados às constantes K_1, K_2 e K_3 por um sistema de 3 equações a 3 variáveis. Logo, essa fórmula representa um caso geral.

A partir de (25), supondo-se que os coeficientes a_k e b_k são reais, pode-se mostrar que, se os coeficientes forem complexos, deve-se ter

$$K_{i_1} + K_{i_3} = 0 \ , \qquad (26)$$

$$K_{i_2} + (p_3 - p_1)K_{i_1} = 0 \qquad (27)$$

e

$$(p_1 - p_3)^2 K_{i_1} = 0 \ . \qquad (28)$$

Como $p_1 \neq p_3$, tem-se que $K_{i_1} = K_{i_2} = K_{i_3} = 0$. Logo, os coeficientes não podem ser complexos.

8.5 Apenas pólos múltiplos e complexos

Exemplo 9

Supondo-se frações parciais com coeficientes reais e com pólos múltiplos e complexos, pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
&\frac{K_2}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2}+\frac{K_4}{(s+\sigma_2+j\omega_2)^2} = \\
&\frac{K_2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2+K_4(s+\sigma_1+j\omega_1)^2}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2} = \\
&\frac{K_2\left[s^2+(2\sigma_2)s+(\sigma_2^2-\omega_2^2)+j(2\omega_2)s+j(2\sigma_2\omega_2)\right]}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2} + \\
&\frac{K_4\left[s^2+(2\sigma_1)s+(\sigma_1^2-\omega_1^2)+j(2\omega_1)s+j(2\sigma_1\omega_1)\right]}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2} = \\
&\frac{(K_2+K_4)s^2+\left[(2\sigma_2)K_2+(2\sigma_1)K_4\right]s+\left[(\sigma_2^2-\omega_2^2)K_2+(\sigma_1^2-\omega_1^2)K_4\right]}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0+j(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)} + \\
&\frac{j2(\omega_2K_2+\omega_1K_4)s+j2(\sigma_2\omega_2K_2+\sigma_1\omega_1K_4)}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0+j(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)} = \\
&\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0} \;=\; \frac{N(s)}{D(s)} \;=\; P(s)\ ,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

onde

$$a_3 = 2(\sigma_1+\sigma_2)\ , \tag{30}$$

$$a_2 = \left[(4\sigma_1\sigma_2)+(\sigma_1^2-\omega_1^2)+(\sigma_2^2-\omega_2^2)\right]\ , \tag{31}$$

$$a_1 = \left[(2\sigma_1)(\sigma_2^2-\omega_2^2)+(2\sigma_2)(\sigma_1^2-\omega_1^2)+(\sigma_1^2-\omega_1^2)(\sigma_2^2-\omega_2^2)\right]\ , \tag{32}$$

$$a_0 = \left[(-4)(1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_1\sigma_2)(\omega_1\omega_2)\right]\ , \tag{33}$$

$$c_3 = 2(\omega_1+\omega_2)\ , \tag{34}$$

$$c_2 = 2\left[(\sigma_1\omega_1+\sigma_2\omega_2)+2(\sigma_1\omega_2+\sigma_2\omega_1)\right]\ , \tag{35}$$

$$c_1 = 2\left[2\sigma_1\sigma_2(\omega_1+\omega_2)+\omega_2(\sigma_1^2-\omega_1^2)+\omega_1(\sigma_2^2-\omega_2^2)\right]\ , \tag{36}$$

$$c_0 = 2\left[\sigma_1\omega_1(\sigma_2^2-\omega_2^2)+\sigma_2\omega_2(\sigma_1^2-\omega_1^2)\right]\ . \tag{37}$$

De (29), supondo-se que os coeficientes a_k e b_k são reais, conclui-se que

$$\omega_2 = -\omega_1 \tag{38}$$

e, conseqüentemente, no caso de $\omega_2 = -\omega_1 \neq 0$, que

$$\sigma_2 = \sigma_1 \tag{39}$$

e

$$K_4 = K_2 \ . \tag{40}$$

Portanto, a Equação (29) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{K}{(s+\sigma+j\omega)^2} + \frac{K}{(s+\sigma-j\omega)^2} &= \frac{K(s+\sigma-j\omega)^2 + K(s+\sigma+j\omega)^2}{(s+\sigma+j\omega)^2(s+\sigma-j\omega)^2} \\ &= \frac{(2K)s^2 + (4\sigma K)s + [2(\sigma^2-\omega^2)K]}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s) \ , \end{aligned} \tag{41}$$

onde

$$a_3 = 4\sigma \ , \tag{42}$$

$$a_2 = \left[(4\sigma^2) + 2(\sigma^2 - \omega^2)\right] \ , \tag{43}$$

$$a_1 = \left[(4\sigma)(\sigma^2 - \omega^2) + (\sigma^2 - \omega^2)^2\right] \ , \tag{44}$$

$$a_0 = \left[4(1 + 2\sigma + \sigma^2)\omega^2\right] \ . \tag{45}$$

Em (41), observa-se que os coeficientes b_k são associados à constante K por um sistema de 3 equações a 1 variável. Nesse caso, b_1 e b_0 dependem de b_2 e a_k. Logo, essa fórmula não representa um caso geral.

Exemplo 10

Alternativamente à Equação (29), pode-se investigar o uso de frações parciais com coeficientes complexos e com pólos múltiplos e complexos. Dessa forma, a Equação (29) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
& \frac{(K_{r_2} + jK_{i_2})}{(s + \sigma_1 + j\omega_1)^2} + \frac{(K_{r_4} + jK_{i_4})}{(s + \sigma_2 + j\omega_2)^2} = \\
& \frac{(K_{r_2} + jK_{i_2})(s + \sigma_2 + j\omega_2)^2 + (K_{r_4} + jK_{i_4})(s + \sigma_1 + j\omega_1)^2}{(s + \sigma_1 + j\omega_1)^2 (s + \sigma_2 + j\omega_2)^2} = \\
& \frac{(K_{r_2} + jK_{i_2}) \left[s^2 + (2\sigma_2)s + (\sigma_2^2 - \omega_2^2) + j(2\omega_2)s + j(2\sigma_2\omega_2) \right]}{(s + \sigma_1 + j\omega_1)^2 (s + \sigma_2 + j\omega_2)^2} + \\
& \frac{(K_{r_4} + jK_{i_4}) \left[s^2 + (2\sigma_1)s + (\sigma_1^2 - \omega_1^2) + j(2\omega_1)s + j(2\sigma_1\omega_1) \right]}{(s + \sigma_1 + j\omega_1)^2 (s + \sigma_2 + j\omega_2)^2} = \\
& \frac{(K_{r_2} + K_{r_4})s^2 + \left[(2\sigma_2)K_{r_2} + (2\sigma_1)K_{r_4} \right] s + \left[(\sigma_2^2 - \omega_2^2)K_{r_2} + (\sigma_1^2 - \omega_1^2)K_{r_4} \right]}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 + j(c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)} + \\
& \frac{j2(\omega_2 K_{r_2} + \omega_1 K_{r_4})s + j2(\sigma_2\omega_2 K_{r_2} + \sigma_1\omega_1 K_{r_4})}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 + j(c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)} + \\
& \frac{j(K_{i_2} + K_{i_4})s^2 + j\left[(2\sigma_2)K_{i_2} + (2\sigma_1)K_{i_4} \right] s + j\left[(\sigma_2^2 - \omega_2^2)K_{i_2} + (\sigma_1^2 - \omega_1^2)K_{i_4} \right]}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 + j(c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)} + \\
& \frac{(-2)(\omega_2 K_{i_2} + \omega_1 K_{i_4})s + (-2)(\sigma_2\omega_2 K_{i_2} + \sigma_1\omega_1 K_{i_4})}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 + j(c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)} = \\
& \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s) \ , \qquad (46)
\end{aligned}
$$

onde os coeficientes a_k e c_k são definidos em (30) a (37).

De (46), supondo-se que os coeficientes a_k e b_k são reais, conclui-se que

$$\omega_2 = -\omega_1 \ , \qquad (47)$$

$$K_{i_2} = -K_{i_4} \qquad (48)$$

e, conseqüentemente, no caso de $\omega_2 = -\omega_1 \neq 0$ e $K_{i_2} = -K_{i_4} \neq 0$, que

$$\sigma_2 = \sigma_1 \qquad (49)$$

e

$$K_{r_2} = K_{r_4} \ . \qquad (50)$$

Portanto, a Equação (46) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{(K_r + jK_i)}{(s+\sigma+j\omega)^2} + \frac{(K_r + jK_i)}{(s+\sigma-j\omega)^2} &= \frac{(K_r + jK_i)(s+\sigma-j\omega)^2 + (K_r + jK_i)(s+\sigma+j\omega)^2}{(s+\sigma+j\omega)^2(s+\sigma-j\omega)^2} \\
&= \frac{(2K_r)s^2 + [(4\sigma)K_r + (-2\omega)K_i]\, s + [2(\sigma^2-\omega^2)K_r + (-2\sigma\omega)K_i]}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\
&= \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = P(s) \ ,
\end{aligned} \tag{51}$$

onde os coeficientes a_k são definidos em (42) a (45).

Em (51), observa-se que os coeficientes b_k são associados às constantes K_r e K_i por um sistema de 3 equações a 2 variáveis. Logo, essa fórmula não representa um caso geral.

Exemplo 11

Alternativamente à Equação (29), pode-se escrever

$$\frac{K_1}{(s+\sigma_1+j\omega_1)}+\frac{K_2}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2}+\frac{K_3}{(s+\sigma_2+j\omega_2)}+\frac{K_4}{(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}=$$

$$\frac{K_1(s+\sigma_1+j\omega_1)(s+\sigma_2+j\omega_2)^2+K_2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}+$$

$$\frac{K_3(s+\sigma_2+j\omega_2)(s+\sigma_1+j\omega_1)^2+K_4(s+\sigma_1+j\omega_1)^2}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}=$$

$$\frac{K_1(s+\sigma_1+j\omega_1)\left[s^2+(2\sigma_2)s+(\sigma_2^2-\omega_2^2)+j(2\omega_2)s+j(2\sigma_2\omega_2)\right]}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}+$$

$$\frac{K_2\left[s^2+(2\sigma_2)s+(\sigma_2^2-\omega_2^2)+j(2\omega_2)s+j(2\sigma_2\omega_2)\right]}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}+$$

$$\frac{K_3(s+\sigma_2+j\omega_2)\left[s^2+(2\sigma_1)s+(\sigma_1^2-\omega_1^2)+j(2\omega_1)s+j(2\sigma_1\omega_1)\right]}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}+$$

$$\frac{K_4\left[s^2+(2\sigma_1)s+(\sigma_1^2-\omega_1^2)+j(2\omega_1)s+j(2\sigma_1\omega_1)\right]}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}=$$

$$\frac{K_1\left\{s^3+(\sigma_1+2\sigma_2)\,s^2+\left[2\left(\sigma_1\sigma_2-\omega_1\omega_2\right)+\left(\sigma_2^2-\omega_2^2\right)\right]s+\left[\sigma_1\left(\sigma_2^2-\omega_2^2\right)+\left(-2\sigma_2\omega_1\omega_2\right)\right]\right.}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}+$$

$$\frac{\left.j(\omega_1+2\omega_2)s^2+j2(\sigma_1\omega_2+\sigma_2\omega_1+\sigma_2\omega_2)s+j\left[2(\sigma_1\sigma_2\omega_2)s+\omega_1\left(\sigma_2^2-\omega_2^2\right)\right]\right\}}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}+$$

$$\frac{K_2\left[s^2+(2\sigma_2)s+(\sigma_2^2-\omega_2^2)+j(2\omega_2)s+j(2\sigma_2\omega_2)\right]}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}+$$

$$\frac{K_3\left\{s^3+(\sigma_2+2\sigma_1)\,s^2+\left[2\left(\sigma_2\sigma_1-\omega_2\omega_1\right)+\left(\sigma_1^2-\omega_1^2\right)\right]s+\left[\sigma_2\left(\sigma_1^2-\omega_1^2\right)+\left(-2\sigma_1\omega_2\omega_1\right)\right]\right.}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}+$$

$$\frac{\left.j(\omega_2+2\omega_1)s^2+j2(\sigma_2\omega_1+\sigma_1\omega_2+\sigma_1\omega_1)s+j\left[2(\sigma_2\sigma_1\omega_1)s+\omega_2\left(\sigma_1^2-\omega_1^2\right)\right]\right\}}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}+$$

$$\frac{K_4\left[s^2+(2\sigma_1)s+(\sigma_1^2-\omega_1^2)+j(2\omega_1)s+j(2\sigma_1\omega_1)\right]}{(s+\sigma_1+j\omega_1)^2(s+\sigma_2+j\omega_2)^2}=$$

$$\frac{(K_1+K_3)s^3+\left[(\sigma_1+2\sigma_2)K_1+K_2+(\sigma_2+2\sigma_1)K_3+K_4\right]s^2}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0+j(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)}+$$

$$\frac{\left\{\left[2\left(\sigma_1\sigma_2-\omega_1\omega_2\right)+\left(\sigma_2^2-\omega_2^2\right)\right]K_1+\left(2\sigma_2\right)K_2\right.}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0+j(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)}+$$

$$\frac{\left.\left[2\left(\sigma_1\sigma_2-\omega_1\omega_2\right)+\left(\sigma_1^2-\omega_1^2\right)\right]K_3+\left(2\sigma_1\right)K_4\right\}s}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0+j(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)}+$$

$$\frac{\left\{\left[(1+\sigma_1)\left(\sigma_2^2-\omega_2^2\right)\right]+\left[(-2)\left(\sigma_1+\sigma_2\right)+\left(\omega_1\omega_2\right)\right]+\left[(1+\sigma_2)\left(\sigma_1^2-\omega_1^2\right)\right]\right\}}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0+j(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)}+$$

$$\frac{j\left[(\omega_1+2\omega_2)K_1+(\omega_2+2\omega_1)K_3\right]s^2}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0+j(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)}+$$

$$\frac{j\left[2(\sigma_1\omega_2+\sigma_2\omega_1+\sigma_2\omega_2)K_1+(2\omega_2)K_2+2(\sigma_1\omega_2+\sigma_2\omega_1+\sigma_1\omega_1)K_1+(2\omega_1)K_4\right]s}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0+j(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)}+$$

$$\frac{j\left\{\left[2(\sigma_1\sigma_2\omega_2)+\omega_1\left(\sigma_2^2-\omega_2^2\right)\right]K_1+2(\sigma_2\omega_2)K_2+\left[2(\sigma_1\sigma_2\omega_1)+\omega_2\left(\sigma_1^2-\omega_1^2\right)\right]K_3+2(\sigma_1\omega_2)K_4\right\}}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0+j(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0)}=$$

$$\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0} \ = \ \frac{N(s)}{D(s)} \ = \ P(s)\ , \tag{52}$$

onde os coeficientes a_k e c_k são definidos em (30) a (37).

======================
Inicio_do_trecho_de_trabalho_corrente
======================

Desenvolver o resto do exemplo...

======================
Fim_do_trecho_de_trabalho_corrente
======================

Exemplo 12

Alternativamente à Equação (46), pode-se escrever

$$\frac{(K_{r_1} + jK_{i_1})}{(s + \sigma_1 + j\omega_1)} + \frac{(K_{r_2} + jK_{i_2})}{(s + \sigma_1 + j\omega_1)^2} + \frac{(K_{r_3} + jK_{i_3})}{(s + \sigma_2 + j\omega_2)} + \frac{(K_{r_4} + jK_{i_4})}{(s + \sigma_2 + j\omega_2)^2} =$$
$$\frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \;=\; \frac{N(s)}{D(s)} \;=\; P(s) \ , \tag{53}$$

onde os coeficientes a_k e c_k são definidos em (30) a (37).

====================
Desenvolver o resto do exemplo...
====================

8.6 Pólos múltiplos e complexos com pólos simples e complexos

—

====================
Desenvolver os demais exemplos...
====================

9 Conclusão e trabalhos futuros

Atendendo a um dos requisitos do Programa PET, integrantes do Grupo PET-Tele identificaram um tema para elaboração de material didático e realizaram a atividade. A expansão de funções algébricas racionais em frações racionais foi escolhido por ser um tema comum em várias disciplinas do curso e, por vezes, não ser tão facilmente absorvido. Foi realizado um estudo sobre o assunto e este documento autoral foi elaborado. Espera-se que este documento seja útil aos alunos da graduação para um melhor entendimento do tema.

Como é prática do grupo, pretende-se realizar manutenção periódica do documento elaborado.

Agradecimentos

O grupo PET-Tele da UFF faz parte do Programa de Educação Tutorial (PET), financiado pelo Ministério da Educação (MEC).

O grupo PET-Tele agradece aos alunos da graduação que leram o documento original, fornecendo algumas sugestões para a versão atual.

Referências

[BD79] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, RJ, 3a. edição, 1979.

[dlV05] A. S. de la Vega. Apostila de Teoria para Circuitos Elétricos V (Versão: Setembro/2005). Universidade Federal Fluminense, Setembro 2005.

[dlV13] A. S. de la Vega. Apostila de Teoria para Processamento Digital de Sinais (Versão A2013M04D06). Universidade Federal Fluminense, Abril 2013.

[IMD+95] G. Iezzi, C. Murakami, O. Dolce, S. Hazzan, J. N. Pompeu, and N. Machado. *Fundamentos da Matemática Elementar (vol. 1 – 10)*. Atual Editora, São Paulo, SP, 1995.

[Lat98] B. P. Lathi. *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Holt, Rinehart and Wiston, Philadelphia, PA, 2nd edition, 1998.

[Mit98] S. K. Mitra. *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*. McGraw-Hill, New York, NY, 1998.

[NR09] J. W. Nilsson and S. A. Riedel. *Circuitos Elétricos*. Pearson – Prentice Hall, São Paulo, SP, 8a. edição, 2009.

[OWY83] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and I. T. Young. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

[Ste09] J. Stewart. *Cálculo*, volume 1. CENGAGE LEARNING, 6a. edição, 2009.

[urla] `http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12223&ativo=481&Itemid=480`.

[urlb] `http://www.octave.org`.

[urlc] `http://www.telecom.uff.br/pet`.

[ZC12] D. G. Zill and M. S. Cullen. *Equações Diferenciais*, volume 1. Pearson – Makron, São Paulo, SP, 3a. edição, 2012.